XIV Olimpiada Iberoamericana de Matemática Universitaria 2011

1. (4 puntos) Sean r y s enteros positivos. Cada uno de los números a_1, a_2, …, a_r, b_1, …, b_s es 1 ó 2. Considera los números que tienen las siguientes representaciones decimales:

$$\begin{aligned} a &= 0.a_1a_2\dots a_ra_1a_2\dots a_r\dots \\ b &= 0.b_1b_2\dots b_sb_1b_2\dots b_s\dots \\ x &= 0.a_1a_2\dots a_rb_1b_2\dots b_s \\ y &= 0.b_1b_2\dots b_sa_1a_2\dots a_r \end{aligned}$$

Muestra que $a \leq b$ si y sólo si $x \leq y$.

Nota: Los números a y b tienen representación decimal periódica. Los números x y y tienen representación decimal finita.

Solución 1

Tenemos las siguientes dos igualdades:

$$\begin{aligned} 10^{r+s}x &= 10^s(10^ra - a) + 10^sb - b \\ 10^{r+s}y &= 10^r(10^sb - b) + 10^ra - a \end{aligned}$$

Restando estas igualdades obtenemos que:

$$\begin{aligned} 10^{r+s}(x-y) &= (10^s(10^ra - a) + 10^sb - b) - (10^r(10^sb - b) + 10^ra - a) \\ &= (10^{r+s} - 10^r - 10^s + 1)(a-b) \\ &= (10^r - 1)(10^s - 1)(a-b) \end{aligned}$$

Finalmente, notemos que 10^{r+s}, $10^r - 1$ y $10^s - 1$ son positivos, así que $x \leq y$ si y sólo si $x - y \leq 0$ si y sólo si $a - b \leq 0$ si y sólo si $a \leq b$. $\square$

Solución 2

Supongamos sin pérdida de generalidad que $r \leq s$. Si $(a_1, a_2, ..., a_r) \neq (b_1, b_2, ..., b_r)$, tomando el menor $t \geq 1$ tal que $a_t \neq b_t$, tenemos, caso $a_t < b_t$, $x < y$ y $0, a_1a_2...a_rb_1b_2...b_s < 0, b_1b_2...b_sa_1a_2...a_r$, y, caso $a_t > b_t$, $x > y$ y $0, a_1a_2...a_rb_1b_2...b_s > 0, b_1b_2...b_sa_1a_2...a_r$. Supongamos entonces que $(a_1, a_2, ..., a_r) = (b_1, b_2, ..., b_r)$, o sea, que β comienza con α. Tomamos

$n \geq 1$ máximo tal que β comienza con α^n (donde α^n es la concatencaión $\alpha\alpha\ldots\alpha$ de n copias de α), i.e., $\beta = \alpha^n\gamma$, donde $\gamma = (c_1, c_2, ..., c_t)$ es una sucesión que no comienza con α. Queremos mostrar que

$$0, \alpha\alpha\alpha... < 0, \beta\beta\beta... = 0, \alpha^n\gamma\alpha^n\gamma\alpha^n\gamma... \iff 0, \alpha\beta = 0, \alpha^{n+1}\gamma < 0, \beta\alpha = 0, \alpha^n\gamma\alpha,$$

pero esto equivale a mostrar que

$$0, \alpha\alpha\alpha... < 0, \gamma\alpha^n\gamma\alpha^n\gamma\alpha^n... \iff 0, \alpha\gamma < 0, \gamma\alpha.$$

Tenemos (llevando en cuenta que $\gamma = (c_1, c_2, ..., c_t)$ no comienza con α) los siguientes casos:

a) $r \leq t$: en este caso, γ comienza con $(c_1, c_2, ..., c_r)$, que es distinto de $\alpha = (a_1, a_2, ..., a_r)$. Si $0, a_1a_2...a_r < 0, c_1c_2...c_r$ valen las dos desigualdades de la última implicación, y, caso contrario, no vale ninguna de las dos.

b) $r > t$ y α no comienza con γ. En ese caso, α comienza com $(a_1, a_2, ..., a_t)$, que es distinto de $\gamma = (c_1, c_2, ..., c_t)$. Si $0, a_1a_2...a_t < 0, c_1c_2...c_t$ valen las dos desigualdades de la última implicación, y, caso contrario, no vale ninguna de las dos.

c) $r > t$ y α comienza con γ. En ese caso, podemos escribir $\alpha = \gamma\tau$. Así, $0, \alpha\gamma < 0, \gamma\alpha$ equivale a $0, \gamma\tau\gamma < 0, \gamma\gamma\tau$, que equivale a $0, \tau\gamma < 0, \gamma\tau$. Por otro lado, $0, \alpha\alpha\alpha...$ comienza con $0, \gamma\tau\gamma$ y $0, \gamma\alpha^n\gamma\alpha^n\gamma\alpha^n...$ comienza com $0, \gamma\gamma\tau$, y luego, si $0, \tau\gamma < 0, \gamma\tau$, entonces $0, \alpha\alpha\alpha... < 0, \gamma\alpha^n\gamma\alpha^n\gamma\alpha^n...$, y si $0, \tau\gamma > 0, \gamma\tau$, entonces $0, \alpha\alpha\alpha... > 0, \gamma\alpha^n\gamma\alpha^n\gamma\alpha^n...$. Finalmente, si $0, \tau\gamma = 0, \gamma\tau$, entonces $\tau\gamma = \gamma\tau$, y luego $\gamma\alpha = \alpha\gamma$, de donde $0, \gamma\alpha^n\gamma\alpha^n = 0, \alpha^{2n}\gamma^2$, $0, \gamma\alpha^n\gamma\alpha^n\gamma\alpha^n = 0, \alpha^{3n}\gamma^3$, etc., y luego $0, \gamma\alpha^n\gamma\alpha^n\gamma\alpha^n... = 0, \alpha\alpha\alpha...$.

$\square$

Criterio

Solución 1

- (1 punto) Encontrar relaciones algebráicas útiles entre x, y, a y b
- (3 puntos) Expresar $x - y$ como un múltiplo positivo de $a - b$ y concluir.

Solución 2

- (1 punto) Llegar a $0, \alpha\alpha\alpha... < 0, \gamma\alpha^n\gamma\alpha^n\gamma\alpha^n... \iff 0, \alpha\gamma < 0, \gamma\alpha$.
- (1 punto) Resolver el caso *a*).
- (1 punto) Resolver el caso *b*).
- (1 punto) Resolver el caso *c*).

2. (4 puntos) El cubo $n-$dimensional C se descompone en 2^n cajas rectangulares más pequeñas por n planos P_1, P_2, $\ldots$, P_n de tal forma que cada eje de C es perpendicular a exactamente uno de esos planos. Las 2^n cajas se marcan en colores blanco y negro de tal manera que cada par de cajas vecinas tiene un color diferente.

Supongamos que la suma de los volúmenes de las cajas en negro es igual a la suma de los volúmenes de las cajas en blanco. Muestre que al menos uno de los planos P_1, P_2, …, P_n bisecta a C.

Solución

Colocamos a C en $\mathbb{R}^3$ de modo que P_i es el $i-$ésimo plano coordenado, es decir, $P_i = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i = 0\}$. Escribimos entonces $C = [-a_1, b_1] \times [-a_2, b_2] \times \ldots \times [-a_n, b_n]$. El color del punto $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ depende del signo del producto $x_1 x_2 \cdots x_n$. Colorearemos $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de blanco si $x_1 x_2 \cdots x_n$ es positivo y de negro si $x_1 x_2 \cdots x_n$ es negativo. Así, podemos dar la diferencia de volúmenes como sigue:

$$\begin{aligned} V_{\text{blanco}} - V_{\text{negro}} &= \int_{-a_1}^{b_1} \cdots \int_{-a_n}^{b_n} \operatorname{sgn}(x_1 \ldots x_n) \mathrm{d}x_n \ldots \mathrm{d}x_n \\ &= \left(\int_{-a_1}^{b_1} \operatorname{sgn} x_1 \mathrm{d}x_1 \right) \cdots \left(\int_{-a_n}^{b_n} \operatorname{sgn} x_n \mathrm{d}x_n \right) \\ &= (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n). \end{aligned}$$

Así, ambas partes tienen igual volumen si y sólo si $a_i = b_i$ para al menos un índice i. □

Observación: La solución realmente puede formularse sin integrales, lo importante es mostrar de alguna forma que

$$V_{\text{blanco}} - V_{\text{negro}} = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n)$$

por ejemplo, con un argumento de polinomios o por inducción sobre n.

Criterio

- (3 puntos) Llegar a $V_{\text{blanco}} - V_{\text{negro}} = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n)$ o a una expresión equivalente según la notación usada.
- (1 punto) Concluir.

Nota: No se penalizará por no justificar con toda formalidad qué puntos son blancos y qué puntos son negros.

3. (5 puntos) Sea $n \geq 2$ un entero. Sea $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ un polinomio con n raíces enteras distintas entre sí y distintas de 1. Muestre que:

$$\frac{n + \sum_{j=0}^{n-1} j a_j}{1 + \sum_{j=0}^{n-1} a_j} < 1 + \ln n.$$

Solución

Comenzamos probando el siguiente lema.

Lema: Si un polinomio f mónico de grado $n \geq 1$ tiene raíces r_1, …, r_n y x no es una raíz, entonces $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x - r_1} + \cdots + \frac{1}{x - r_n}$.

Demostración Escribimos $f(x) = (x-r_1)(x-r_2)\cdots(x-r_n)$. Derivando con regla del producto obtenemos $f'(x) = \frac{f(x)}{x-r_1} + \ldots + \frac{f(x)}{x-r_n}$. Al dividir entre $f(x)$ obtenemos el resultado. $\square$

Reconocemos la expresión $\frac{n+\sum_{j=0}^{n-1} ja_j}{1+\sum_{j=0}^{n-1} a_j}$ como $\frac{f'(1)}{f(1)}$ y por tanto, aplicando el Lema para $x = 1$, la expresión es igual a $\frac{1}{1-r_1} + \frac{1}{1-r_2} + \ldots + \frac{1}{1-r_n}$. Así, tenemos n sumandos distintos en el conjunto $\{\ldots, -\frac{1}{2}, -1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\ldots\}$, de modo que el máximo de la suma se alcanza para cuando las raíces del polinomio son 0, -1, -2, $\ldots$, $-n+1$. Para estas raíces la expresión vale $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$. Finalmente, la suma $\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ es una suma inferior para $\int \frac{1}{x}\, dx$ en el intervalo $(1, n)$ y por tanto $\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} < \int_1^n \frac{1}{x}\, dx = \ln n$.

Sumando 1 a cada lado de esta desigualdad obtenemos la desigualdad buscada. $\square$

Criterio

- (1 punto) Reconocer la expresión izquierda como $\frac{f'(1)}{f(1)}$.
- (2 puntos) Usar el Lema para poner la expresión de la forma $\frac{1}{1-r_1} + \frac{1}{1-r_2} + \ldots + \frac{1}{1-r_n}$.
- (1 punto) Argumentar que el valor máximo es $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.
- (1 punto) Acotar con el logaritmo y concluir.

Nota: No es necesario probar el Lema, es posible citarlo como un resultado de derivación logarítmica.

4. (5 puntos) Los números complejos a, b y c satisfacen que $a|bc| + b|ca| + c|ab| = 0$. Muestre que

$$|(a-b)(b-c)(c-a)| \geq 3\sqrt{3}|abc|.$$

Solución

Primero observamos que si alguno de los números a, b o c es 0 entonces se cumple lo que queremos, pues el lado derecho es 0 y el izquierdo es la norma de un complejo.

Así, podemos suponer $abc \neq 0$. Dividiendo la ecuación $a|bc| + b|ca| + c|ab| = 0$ entre $|abc|$, obtenemos que:

$$\frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{c}{|c|} = 0.$$

De este modo, tenemos tres complejos unitarios con suma cero. Geométricamente, la suma de dos vectores de norma 1 está en un círculo unitario con centro en un vector unitario. Para que con el tercero sume cero, es necesario que esté también en el círculo unitario con centro en el origen. La única forma en que pase esto es que los tres vectores sean los vértices de un triángulo equilátero.

Esto lo que nos dice es que el ángulo entre a y b es $120°$, así como entre b y c y entre c y a.

Usando Ley de Cosenos y la desigualdad entre media aritmética y media geométrica obtenemos que $|a-b|^2 = |a|^2 + |b|^2 + |a||b| \geq 3|a||b|$. Haciendo una cuenta análoga para $|b-c|$ y $|c-a$ y multiplicando estas desigualdades, obtenemos que:

$$|a-b|^2|b-c|^2|c-a|^2 \geq 27|abc|^2$$

Finalmente, sacando raíz cuadrada obtenemos la desigualdad buscada. $\square$

Nota: Es posible terminar el problema de otras formas, como usando Ley de Senos o la caraterización de que el punto de Fermat minimiza la suma de las distancias a los vértices.

Criterio

- (2 puntos) Mostrar que el ángulo entre los números complejos es 120°, o bien que los unitarios forman un triángulo equilátero.
- (3 puntos) Trabajar con desigualdades y llegar al resultado deseado.
- (-1 punto) Si la prueba requiere suponer que algún número es distinto de 0, se restará un punto por no considerar este caso aparte.

5. (6 puntos) Se tienen tres círculos ω_1, ω_2, ω_3 en la esfera unitaria S de $\mathbb{R}^3$. Supongamos que para cada par de índices (i,j) con $1 \leq i < j \leq 3$ existen dos círculos máximos C_{ij} y C_{ji} de S tales que ambos son tangentes a w_i y w_j y ninguno de los dos separa w_i y w_j. Los círculos máximos C_{ij} y C_{ji} se intersectan en los puntos P_{ij} y P_{ji}.

   Demuestra que los puntos P_{12}, P_{23}, P_{31}, P_{13}, P_{32} y P_{21} están en un mismo círculo máximo de S.

   Solución

   Para $i = 1,2,3$, definimos S_i como la esfera ortogonal a S que la intersecta en ω_i. Para $1 < i < j < 3$ definimos H_{ij} el centro de homotecia externo de S_i y S_j.

   El plano que define a C_{ij} es tangente a S_i y S_j, y ambas esferas estan del mismo lado de este plano. De esta forma, H_{ij} está en este plano. Similarmente, H_{ij} está en el plano C_{ji}. Así, H_{ij} está en la linea de intersección de estos planos, precisamente la línea $P_{ij}P_{ji}$.

   Como los centros de homotecia de tres esferas son colineales, las líneas $P_{12}P_{21}$, $P_{13}P_{31}$ y $P_{32}P_{23}$ son coplanares y por tanto los puntos $P_{12}, P_{21}, P_{13}, P_{31}, P_{23}, P_{32}$ caen en un mismo círculo máximo de S. $\square$

   Criterio

   - (2 puntos) Considerar las esferas ortogonales a S que lo cruzan en cada ω_i.
   - (2 puntos) Mostrar que el centro de homotecia de S_i y S_j está en la recta $P_{ij}P_{ji}$.
   - (2 puntos) Usar la colinealidad de los centros de homotecia para concluir.

6. (7 puntos) Los enteros no negativos a, b, c y d satisfacen $2ab + 2bc + 2ca - a^2 - b^2 - c^2 = d^2$.

   Considera el conjunto X de enteros que se pueden escribir como suma de cuadrados de dos enteros.

Muestra que a, b y c están los tres en X si y sólo si el máximo común divisor de a, b y c está en X.

Solución

Si $d = 0$, suponemos sin pérdida de generalidad $a \leq b \leq c$. Tenemos

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})(\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{c})(-\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}) = 2ab+2ac+2bc-a^2-b^2-c^2 = 0$$

Por tanto, $\sqrt{c} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ y $c = a + b + 2\sqrt{ab}$. Escribiendo $a = d\tilde{a}$, $b = d\tilde{b}$ con $mcd(\tilde{a}, \tilde{b}) = 1$, tenemos $\sqrt{ab} = d\sqrt{\tilde{a}\tilde{b}} \in \mathbf{Q}$, por lo que $\tilde{a}\tilde{b}$ es un cuadrado, $\tilde{a} = u^2$, $\tilde{b} = v^2$ con $u, v \in \mathbf{N}$, y tenemos que $c = d(u^2 + v^2 + 2uv) = d(u + v)^2$. Así

$$d = mcd(a, b, c) \in X \iff (a \in X,\, b \in X,\, c \in X)$$

pues

$$X = \{p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k} \in \mathbf{N}, p_1 < \dots < p_k,\, primos,\, \alpha_j \in \mathbf{N} \,|\, (p_j \equiv 3 \, mod\, 4) \Rightarrow \alpha_j \, par\} \cup \{0\}$$

Supongamos ahora $d \neq 0$.

Ponemos $x = \frac{a}{d}$, $y = \frac{b}{d}$, $z = \frac{c}{d} \in \mathbf{Q}$, y tenemos $2xy + 2xz + 2yz - x^2 - y^2 - z^2 = 1$. Tenemos la solución $x = y = \frac{1}{2}$, $z = 1$.

Busquemos otras soluciones de la forma $x = \frac{1}{2} + tp$, $y = \frac{1}{2} + tq$, $z = \frac{1}{2} + tr$, con $r \in \mathbf{R}$ y $(p, q, r) \in \mathbf{Z}^3 - \{(0, 0, 0)\}$.

Sustituyendo obtenemos:

$t(p^2 + q^2 + r^2 - 2pq - 2pr - 2qr) = p + q + 2p + r + 2q + r - p - q - 2r = 2(p + q)$

por lo tanto

$t = \frac{2(p+q)}{p^2+q^2+r^2-2pq-2pr-2qr}$,

$x = \frac{5p^2+q^2+r^2+2pq-2pr-2qr}{2(p^2+q^2+r^2-2pq-2pr-2qr)}$,

$y = \frac{p^2+5q^2+r^2+2pq-2pr-2qr}{2(p^2+q^2+r^2-2pq-2pr-2qr)}$ y

$z = \frac{p^2+q^2+r^2-2pq}{2(p^2+q^2+r^2-2pq-2pr-2qr)}$.

Así, si $k := 2(p^2 + q^2 + r^2 - 2pq - 2pr - 2qr)$, tenemos

$kd(a, b, c) = d^2(5p^2+q^2+r^2+2pq-2pr-2qr, p^2+5q^2+r^2+2pq-2pr-2qr, 2(p^2+q^2+r^2+2pq))$;

como

$5p^2 + q^2 + r^2 + 2pq - 2pr - 2qr = (2p)^2 + (p + q - r)^2$,

$p^2 + 5q^2 + r^2 + 2pq - 2pr - 2qr = (2q)^2 + (p + q - r)^2$, y

$2(p^2 + q^2 + r^2 - 2pq) = (p - q + r)^2 + (p - q - r)^2$.

El resultado se sigue de los siguiente hechos (que son consecuencia de la expresión de X):

i) Si $a_1, a_2, \dots, a_m \in X$, entonces $mcd(a_1, \dots, a_m) \in X$.

ii) Si $a \in X - \{0\}$ y $k \in \mathbf{N}$, entonces $ka \in X \iff k \in X$.

Se hecho, si $\tilde{d} = mcd(a,b,c)$, $a = \tilde{d}\tilde{a}$, $b = \tilde{d}\tilde{b}$, $c = \tilde{d}\tilde{c}$, como $kdd\tilde{d}\tilde{a}$, $kdd\tilde{d}\tilde{b}$ y $kdd\tilde{d}\tilde{c}$ pertenecen a X, por i) $kdd\tilde{d} \in X$, y luego $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{c} \in X$. Por lo tanto, de ii), $\tilde{s} \in X \iff (a = \tilde{a}\tilde{d}, b = \tilde{b}\tilde{d}, c = \tilde{c}\tilde{d} \in X)$. $\square$

Criterio

- (1 punto) Mostrar que si a, b, $c \in X$, entonces $\gcd(a,b,c) \in X$.
- (2 puntos) Mostrar el regreso para $d = 0$.
- (4 puntos) Mostrar el regreso para $d \neq 0$.

7. (8 puntos) Considera

$$\mathcal{F} = \left\{ f \in C([0,1]) : \forall x \in [0,1], \left| \int_0^x \frac{f(t)\,dt}{\sqrt{x-t}} \right| \leq 1 \right\}.$$

Determina

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \left| \int_0^1 f \right|.$$

Solución

La clave de la solución es la siguiente identidad.

Lema Para cualquier función $f \in L_1[0,1]$,

$$\int_0^1 \left(\int_0^x \frac{f(t)\mathrm{d}t}{\sqrt{x-t}} \right) \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}} = \pi \int_0^1 f. \tag{$*$}$$

Demostración Cambiando el orden de integración y substituyendo $t = -1 + 2\frac{x-t}{1-t}$,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\int_0^x \frac{f(t)\mathrm{d}t}{\sqrt{x-t}} \right) \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}} &= \int_0^1 f(t) \left(\int_t^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-t)(1-x)}} \right) \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 f(t) \left(\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1+t)(1-t)}} \right) \mathrm{d}t \\ &= \pi \int_0^1 f. \end{aligned}$$

$\square$

Usando el Lema, para cada $f \in \mathcal{F} \subset L_1[0,1]$ tenemos que

$$\left| \int_0^1 f \right| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^1 \left| \int_0^x \frac{f(t)\mathrm{d}t}{\sqrt{x-t}} \right| \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}} \leq \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}} = \frac{2}{\pi}$$

de modo que $\sup_{f \in \mathcal{F}} \left| \int_0^1 f \right| \leq \frac{2}{\pi}$.

Para la función $g(x) = \dfrac{1}{\pi\sqrt{x}}$ tenemos que

$$\int_0^x \frac{g(t)\mathrm{d}t}{\sqrt{x-t}} = \frac{1}{\pi}\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(x-t)}} = 1.$$

Consideremos la sucesión de funciones $f_1, f_2, \dots$ de $[0,1]$ a $\mathbb{R}$ dadas por $f_n(x) = \dfrac{1}{\pi\sqrt{x+\frac{1}{n}}}$.
Entonces $f_n \in C[0,1]$ y $0 < f \leq g$, por lo que $f_n \in \mathcal{F}$. Como $f_n(x) \to g(x)$ puntualmente, tenemos que $\int_0^1 f_n \to \int_0^1 g = \frac{2}{\pi}$.

De este modo, $\sup_{f\in\mathcal{F}} \left| \int_0^1 f \right| = \frac{2}{\pi}$.

Nota: Para cada entero positivo u podemos definir la $u-$ésima integral de f como

$$\begin{aligned}(I_u f)(x) &= \int_0^x \left(\int_0^{t_{n-1}} \dots \left(\int_0^{t_{n-1}} f(t_1)\mathrm{d}t_1 \right) \dots \right) \mathrm{d}t_n \\ &= \int_0^x f(t)\frac{(x-t)^{u-1}}{(u-1)!}\mathrm{d}t = \int_0^x f(t)\frac{(x-t)^{u-1}}{\Gamma(u)}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Esta operación puede extenderse a todos los valores reales de u y es aditiva: $I_u I_v = I_{u+v}$. La identidad del Lema es el caso particular para $u = v = \frac{1}{2}$. $\square$

Criterio

- (5 puntos) Mostrar que $\sup_{f\in\mathcal{F}} \left| \int_0^1 f \right| \leq \frac{2}{\pi}$
    - (1 punto) Enunciar el Lema.
    - (2 puntos) Demostrar el Lema.
    - (2 puntos) Concluir que $\sup_{f\in\mathcal{F}} \left| \int_0^1 f \right| \leq \frac{2}{\pi}$.
- (3 puntos) Mostrar que $\sup_{f\in\mathcal{F}} \left| \int_0^1 f \right| \geq \frac{2}{\pi}$.
    - (1 punto) Dar una sucesión de funciones que sirva.
    - (2 punto) Mostrar que esta sucesión de funciones sirve.