Olimpiada Iberoamericana de Matemática Universitaria 2012
Problemas, soluciones y criterios

1. Problemas

1. **(3 puntos)** Sea $\mathbb{Z}$ el anillo de los enteros. Los conjuntos $\mathbb{Z}$, $2\mathbb{Z}$ y $3\mathbb{Z}$ son semigrupos con respecto a la multiplicación. ¿Cuáles de ellos son isomorfos?

   Nota: Recuerda que un semigrupo es un conjunto no vacío con operación binaria asociativa. Dos semigrupos G y H son isomorfos si existe una biyección f entre ellos tal que ella y su inversa preserven la operación de semigrupo.

2. **(4 puntos)** Sea n un entero positivo y $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función continua, diferenciable en $(0,1)$, con $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$. Demuestra que existen n reales distintos $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tales que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f'(\alpha_k)} = n.$$

3. **(4 puntos)** Encuentra todas las ternas (x, y, z) de enteros que satisfacen

$$x^2 + 7y^2 = 2012z^2.$$

4. **(4 puntos)** Analiza si la siguiente serie converge o no y, en caso de que sí, calcula su valor:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{1+n+n^2}\right).$$

5. **(6 puntos)** La matriz M es de 3×3 y de entradas enteras. Su determinante es 1. Muestra que existe un vector $v \in \mathbb{Z}^3$ tal que $v^T M v = 1$.

   NB. La pregunta 5 debió incluir la hipótesis que la matriz es positiva definida. Por este motivo y como existe un contraejemplo al problema como quedó especificado en el examen, este problema no se consideró para determinar puntajes en el concurso. Se muestra un contraejemplo y la solución suponiendo esta hipótesis.

6. **(6 puntos)** Un conjunto de puntos es *rifado* si no hay 3 puntos alineados, no hay 4 puntos en una misma circunferencia y para cualesquiera 5 puntos distintos A, B, C, D y E los triángulos ABC, ACD y ADE tienen circunradios distintos.

Muestra que si tenemos un conjunto rifado de 2012 puntos en el plano, entonces es posible elegir 8 de ellos tales que todos los triángulos que se pueden hacer con cada tres de ellos tienen circunradios distintos.

Nota: El circunradio de un triángulo ABC es el radio de la circunferencia que pasa por A, B y C.

7. **(7 puntos)** Sea $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ el disco unitario en el plano complejo y $0 < a < 1$ un número real. Supongamos que $f : D \to \mathbb{C}$ es una función holomorfa tal que $f(a) = 1$ y $f(-a) = -1$.

   (a) Muestra que:
   $$\sup_{z\in D} \left|f(z)\right| \geq \frac{1}{a}.$$

   (b) Muestra que si f no tiene raíces entonces:
   $$\sup_{z\in D} \left|f(z)\right| \geq \exp\left(\frac{1-a^2}{4a}\pi\right).$$

2. Soluciones y criterios

1. Los conjuntos $\mathbb{Z}$ y $2\mathbb{Z}$ no pueden ser isomorfos, pues el primero tiene una identidad para la operación (el 1) y el otro no tiene identidad.

   Ahora veremos que $2\mathbb{Z}$ y $3\mathbb{Z}$ son isomorfos. Por el Teorema fundamental de la aritmética, cada número $m \in \mathbb{Z}$ tiene una única expresión de la forma:

   $$m = r2^a3^bp$$

   con p entero positivo no múltiplo de 2 ni de 3, $r = \pm 1$ y a, b enteros no negativos.

   Proponemos a la función f que intercambia a con b. Es invertible pues su inversa es ella misma. Si $m \in 2\mathbb{Z}$, entonces $a > 0$ y por tanto $f(m) \in 3\mathbb{Z}$. De modo similar, si $m \in 3\mathbb{Z}$, entonces $f(m) \in 2\mathbb{Z}$. Notemos finalmente que si tenemos además $n = s2^c3^dq$ entonces:

   $$f(mn) = f((r2^a3^bp)(s2^c3^dq)) = f(rs2^{a+c}3^{b+d}pq) = rs2^{b+d}3^{a+c}pq = f(m)f(n).$$

   De este modo, f es un isomorfismo entre $2\mathbb{Z}$ y $3\mathbb{Z}$. $\square$

   - **(1 punto)** Mostrar que $\mathbb{Z}$ y $2\mathbb{Z}$ (ó $3\mathbb{Z}$) no son isomorfos.
   - **(1 punto)** Proponer un isomorfismo válido entre $2\mathbb{Z}$ y $3\mathbb{Z}$.
   - **(1 punto)** Argumentar o esbozar un argumento de por qué f es isomorfismo.

2. Para $k = 1, \ldots, n-1$, consideremos el conjunto $A_k = \{x \in [0,1] : f(x) = k/n\}$. Por el Teorema del valor intermedio tenemos que A_k es no vacío para todo k. Sea $\xi_k = \text{ínf}\, A_k$, para $k = 1, \ldots, n-1$. Por la continuidad de f es claro que $\xi_k \in A_k$. Definamos $\xi_0 = 0$ y $\xi_n = 1$.

   De nuevo por continuidad, tenemos $\xi_{k-1} < \xi_k$ para $k = 1, \ldots, n$. Por el teorema del valor medio tenemos que existe $\alpha_k \in (\xi_{k-1}, \xi_k)$ tal que

   $$\frac{1}{f'(\alpha_k)} = \frac{\xi_k - \xi_{k-1}}{f(\xi_k) - f(\xi_{k-1})} = n(\xi_k - \xi_{k-1}).$$

   Sumando para $k = 1, 2, \ldots, n$ y cancelando telescópicamente obtenemos el resultado. $\square$

   - **(1 punto)** Considerar los conjuntos A_k y argumentar que no son vacíos.
   - **(1 punto)** Considerar los ínfimos de los conjuntos A_k.
   - **(2 puntos)** Usar el Teorema de valor medio para concluir.

3. Mostraremos que la única solución que existe es la $(0, 0, 0)$. Trabajaremos módulo 7. Obtenemos $x^2 \equiv 3z^2 \pmod{7}$.

   Los cuadrados módulo 7 son $0, 1, 4, 2$. Multiplicados por 3 son $0, 3, 5, 6$. De este modo, la igualdad se puede dar si y sólo si x y z son múltiplos de 7. Así, $7^2|x^2$, $7^2|2012z^2$ y por tanto $7^2|7y^2$, de modo que y es múltiplo de 7. Cancelando 7^2 en ambos lados de la ecuación obtenemos que si (x, y, z) es solución, entonces $\left(\frac{x}{7}, \frac{y}{7}, \frac{z}{7}\right)$ también lo es.

A partir de aquí se puede concluir de distintas formas, por ejemplo, diciendo que entonces 7^n divide a x, y, z para cualquier n y por tanto $x = y = z = 0$. $\square$

- **(2 puntos)** Mostrar que la única solución a $x^2 \equiv 3z^2 \pmod 7$ es con $x, z \equiv 0 \pmod 7$. A enunciados del estilo "claramente la única solución es esta" no se les otorgarán estos puntos.
- **(1 punto)** Mostrar que y también es múltiplo de 7.
- **(1 punto)** Concluir.

4. Veamos que para toda $x > 0$ real se cumple $\arctan x < x$. Para ello definimos la función $f(x) = x - \arctan x$, la cual es derivable en todo $\mathbb{R}$. Su derivada es

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2},$$

la cual es positiva para todo $x \in \mathbb{R}$. Entonces la función f es monótona creciente en todo $\mathbb{R}$ y como $f(0) = 0$, se deduce de ello que para toda $x > 0$ real se cumple $\arctan x < x$.

De este resultado se deriva entonces que

$$\arctan\left(\frac{1}{1+n+n^2}\right) \leq \frac{1}{1+n+n^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$

La convergencia de la serie del problema se deduce por el criterio de comparación a partir de la convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Finalmente, para calcular la suma, la expresamos telescópicamente:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{1+n+n^2}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \arctan\left(\frac{(n+1)-n}{1+(n+1)n}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \arctan\left(\frac{\tan\big(\arctan(n+1)\big) - \tan\big(\arctan(n)\big)}{1+\tan\big(\arctan(n+1)\big)\tan\big(\arctan(n)\big)}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \arctan\Big[\tan\big(\arctan(n+1) - \arctan(n)\big)\Big] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} [\arctan(n+1) - \arctan(n)] \\
&= \lim_{n\to\infty} \arctan(n+1) = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

$\square$

- **(2 puntos)** Mostrar que la serie es convergente.
- **(2 puntos)** Mostrar que el valor de la serie es $\frac{\pi}{2}$.

5. - Si no se supone que la matriz debe ser positiva definida, se tiene el siguiente contraejemplo:

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & -3 \end{bmatrix} \tag{1}$$

   - Suponemos que M es positiva definida.
     Consideremos la elipsoide
     $$E = \{v \in \mathbb{R}^3 : v^T M v < 2\}.$$
     Si tenemos que $v \in E$, entonces $v^T M v < 2$, de modo que $(-v)^T M(-v) < 2$. Esto muestra que E es simétrico alrededor del origen. Como E es un elipsoide, entonces
     Como M es de determiniante 1, entonces el volumen de E es $\frac{4\pi 2^{3/2}}{3} > 2^3$. Así, E satisface las hipótesis del Teorema de Minkowski y por tanto dicho teorema nos da un punto de coordenadas enteras dentro de E distinto de $(0, 0, 0)$.
     Para este punto se cumple que $v^T M v < 2$, y como v y M son de entradas enteras, entonces $v^T M v = 1$, como queríamos. □

6. Tomemos un subconjunto M de puntos de modo que tenga tamaño máximo y que cumpla que cualesquiera tres puntos determinan un radio distinto. Si este subconjunto tiene 8 puntos o más, entonces terminamos. Si no, es por que tiene $k \leq 7$ puntos. De esta forma, a lo más hay $\binom{k}{3}$ radios distintos que se hacen.

   Para cada una de las $\binom{k}{2}$ parejas de puntos x y y en M y cada uno de los $\binom{k}{3}$ radios r que existen, hay exactamente dos circunferencias de radio r que pasan por x y y. Consideremos estas $2\binom{k}{2}\binom{k}{3}$ circunferencias. Probaremos que todos los puntos caen en estas circunferencias.

   Supongamos que no, que hay un punto A fuera. Afirmamos que $M \cup \{A\}$ genera puros circunradios distintos. En efecto, no puede generar un radio de los que teníamos antes pues eso justo es caer en alguna de las circunferencias. Así, si generara radios iguales, sería por que hay $B, C, D, E \in M$ tales que ABC y ADE tienen circunradios iguales. Esto es imposible por hipótesis.

   Esto prueba que los puntos caen en las circunferencias que dijimos. Como no hay cuatro puntos en una misma, a lo más hay un punto en cada una. Esto nos muestra que a lo más tenemos $k + 2\binom{k}{2}\binom{k}{3} \leq 7 + 2\binom{7}{2}\binom{7}{3} = 1487$ puntos, pero esto no es posible pues al inicio teníamos 2012 puntos. Esta contradicción muestra que M debe tener 8 puntos o más □

   - **(2 puntos)** Considerar el conjunto máximo de puntos con triángulos de circunradios distintos.
   - **(2 puntos)** Considerar las $2\binom{k}{2}\binom{k}{3}$ circunferencias de la solución.
   - **(1 punto)** Mostrar que el resto de los puntos debe caer en estas circunferencias.
   - **(1 punto)** Acotar $k + 2\binom{k}{2}\binom{k}{3}$ y concluir.

7. Para el inciso (a), consideramos $g(z) = \frac{f(z)-f(-z)}{2z}$ para $z \neq 0$ y $g(0) = f'(0)$. Está función también es holomorfa y satisface $g(a) = \frac{1-(-1)}{2a} = \frac{1}{a}$. Usando la desigualdad del triángulo y el principio del máximo, tenemos que para $a < r < 1$ se tiene

$$\sup_{z\in D} |f(z)| \geq \max_{|z|=r} |f(z)| \geq r \cdot \max_{|z|=r} \frac{|f(z)| + |f(-z)|}{2r} \geq r \cdot \max_{|z|=r} |g(z)| \geq r \cdot |g(a)| = \frac{r}{a}.$$

Haciendo tender r a 1 por la izquierda, obtenemos el resultado deseado.

Para el inciso (b), consideramos $M = \sup_{z\in D} |f(z)|$. Como f no es constante, $|f| < M$ en todo D. En particular, de $f(a) = 1$ obtenemos que $M > 1$. La función f es no cero en la región simplemente conexa D, de modo que tiene un logaritmo, es decir, existe una función holomorfa $g : D \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) = e^{g(z)}$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer $g(a) = 0$. De $f(-a) = -1$ obtenemos que $g(-a) = k\pi i$ para un entero impar k, y de $|f| < M$ obtenemos que $\operatorname{Re} g < \log M$. Sea H el semiplano $\operatorname{Re} z < \log M$. Entonces g es una función de D a H.

Ahora, consideremos las siguientes transformaciones:

$$\varphi : D \to D, \quad \varphi(z) = \frac{z+a}{1+az}, \quad \varphi^{-1}(z) = \frac{z-a}{1-az} \quad \text{y} \quad \psi : H \to D, \quad \psi(z) = \frac{z}{2\log M - z}.$$

Consideremos la función $h : D \to D$ dada por $h = \psi \circ g \circ \varphi$. Como $\varphi(0) = a$, $g(a) = 0$ y $\psi(0) = 0$, entonces $h(0) = 0$. De este modo, aplicando el Lema de Schwarz a h y el punto $\varphi^{-1}(-a) = \frac{-2a}{1+a^2}$, obtenemos que $\left|h\left(\frac{-2a}{1+a^2}\right)\right| \leq \frac{2a}{1+a^2}$. Ya con estos estimados concluimos como sigue:

$$\frac{2a}{1+a^2} \geq \left|h(\varphi^{-1}(-a))\right| = |\psi(g(-a))| = \left|\frac{k\pi i}{2\log M - k\pi i}\right| = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{2\log M}{|k|\pi}\right)^2 + 1}}$$

$$\log M \geq \frac{|k|\pi}{2}\sqrt{\left(\frac{1+a^2}{2a}\right)^2 - 1} = \frac{|k|\pi}{2} \cdot \frac{1-a^2}{2a}. \geq \frac{1-a^2}{4a}\pi.$$

□

Nota Los estimados en el problema son justos. Por ejemplo, tenemos la igualdad en (a) para $f(z) = \frac{z}{a}$. Para la parte (b) tenemos igualdad en $f(z) = -i\exp\left(\frac{iz-a^2}{iz+1} \cdot \frac{\pi}{2a}\right)$.

- **(1 punto)** Inciso (a). Hacer el estimado con el Principio del máximo.
- **(1 punto)** Inciso (a). Concluir.
- **(2 puntos)** Inciso (b). Proponer y justificar la existencia de g.
- **(1 punto)** Inciso (b). Proponer las funciones ψ, φ y h.
- **(2 puntos)** Inciso (b). Estimación para h con el Lema de Schwarz y conclusión.