Olimpiada Iberoamericana de Matemática Universitaria 2012

1. **(3 puntos)** Sea $\mathbb{Z}$ el anillo de los enteros. Los conjuntos $\mathbb{Z}$, $2\mathbb{Z}$ y $3\mathbb{Z}$ son semigrupos con respecto a la multiplicación. ¿Cuáles de ellos son isomorfos?

   Nota: Recuerda que un semigrupo es un conjunto no vacío con operación binaria asociativa. Dos semigrupos G y H son isomorfos si existe una biyección f entre ellos tal que ella y su inversa preserven la operación de semigrupo.

2. **(4 puntos)** Sea n un entero positivo y $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función continua, diferenciable en $(0,1)$, con $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$. Demuestra que existen n reales distintos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tales que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f'(\alpha_k)} = n.$$

3. **(4 puntos)** Encuentra todas las ternas (x, y, z) de enteros que satisfacen

$$x^2 + 7y^2 = 2012z^2.$$

4. **(4 puntos)** Analiza si la siguiente serie converge o no y, en caso de que sí, calcula su valor:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{1+n+n^2}\right).$$

5. **(6 puntos)** La matriz M es de 3×3 y de entradas enteras. Su determinante es 1. Muestra que existe un vector $v \in \mathbb{Z}^3$ tal que $v^T M v = 1$.

   NB. La pregunta 5 debió incluir la hipótesis que la matriz es positiva definida. Por este motivo y como existe un contraejemplo al problema como quedó especificado en el examen, este problema no se consideró para determinar puntajes en el concurso.

6. **(6 puntos)** Un conjunto de puntos es *rifado* si no hay 3 puntos alineados, no hay 4 puntos en una misma circunferencia y para cualesquiera 5 puntos distintos A, B, C, D y E los triángulos ABC, ACD y ADE tienen circunradios distintos.

   Muestra que si tenemos un conjunto rifado de 2012 puntos en el plano, entonces es posible elegir 8 de ellos tales que todos los triángulos que se pueden hacer con cada tres de ellos tienen circunradios distintos.

   Nota: El circunradio de un triángulo ABC es el radio de la circunferencia que pasa por A, B y C.

7. **(7 puntos)** Sea $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ el disco unitario en el plano complejo y $0 < a < 1$ un número real. Supongamos que $f : D \to \mathbb{C}$ es una función holomorfa tal que $f(a) = 1$ y $f(-a) = -1$.

   (a) Muestra que:

   $$\sup_{z \in D} \left| f(z) \right| \geq \frac{1}{a}.$$

   (b) Muestra que si f no tiene raíces entonces:

   $$\sup_{z \in D} \left| f(z) \right| \geq \exp\left(\frac{1 - a^2}{4a} \pi \right).$$