Olimpiada Iberoamericana de Matemática Universitaria 2011

1. (4 puntos) Sean r y s enteros positivos. Cada uno de los números $a_1, a_2, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_s$ es 1 ó 2. Considera los números que tienen las siguientes representaciones decimales:

$$\begin{aligned} a &= 0.a_1a_2\ldots a_ra_1a_2\ldots a_r\ldots \\ b &= 0.b_1b_2\ldots b_sb_1b_2\ldots b_s\ldots \\ x &= 0.a_1a_2\ldots a_rb_1b_2\ldots b_s \\ y &= 0.b_1b_2\ldots b_sa_1a_2\ldots a_r \end{aligned}$$

   Muestra que $a \leq b$ si y sólo si $x \leq y$.

   Nota: Los números a y b tienen representación decimal periódica. Los números x y y tienen representación decimal finita.

2. (4 puntos) El cubo $n-$dimensional C se descompone en 2^n cajas rectangulares más pequeñas por n planos $P_1, P_2, \ldots, P_n$ de tal forma que cada eje de C es perpendicular a exactamente uno de esos planos. Las 2^n cajas se marcan en colores blanco y negro de tal manera que cada par de cajas vecinas tiene un color diferente.

   Supongamos que la suma de los volúmenes de las cajas en negro es igual a la suma de los volúmenes de las cajas en blanco. Muestre que al menos uno de los planos $P_1, P_2, \ldots, P_n$ bisecta a C.

3. (5 puntos) Sea $n \geq 2$ un entero. Sea $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ un polinomio con n raíces enteras distintas entre sí y distintas de 1. Muestre que:

$$\frac{n + \sum_{j=0}^{n-1} ja_j}{1 + \sum_{j=0}^{n-1} a_j} < 1 + \ln n.$$

4. (5 puntos) Los números complejos a, b y c satisfacen que $a|bc| + b|ca| + c|ab| = 0$. Muestre que

$$|(a-b)(b-c)(c-a)| \geq 3\sqrt{3}|abc|.$$

5. (6 puntos) Se tienen tres círculos ω_1, ω_2, ω_3 en la esfera unitaria S de $\mathbb{R}^3$. Supongamos que para cada par de índices (i, j) con $1 \leq i < j \leq 3$ existen dos círculos máximos C_{ij} y C_{ji} de S tales que ambos son tangentes a w_i y w_j y ninguno de los dos separa w_i y w_j. Los círculos máximos C_{ij} y C_{ji} se intersectan en los puntos P_{ij} y P_{ji}.

   Demuestra que los puntos P_{12}, P_{23}, P_{31}, P_{13}, P_{32} y P_{21} están en un mismo círculo máximo de S.

6. (7 puntos) Los enteros no negativos a, b, c y d satisfacen $2ab + 2bc + 2ca - a^2 - b^2 - c^2 = d^2$.

   Considera el conjunto X de enteros que se pueden escribir como suma de cuadrados de dos enteros.

   Muestra que a, b y c están los tres en X si y sólo si el máximo común divisor de a, b y c está en X.

7. (8 puntos) Considera

$$\mathcal{F} = \left\{ f \in C([0,1]) : \forall x \in [0,1], \left| \int_0^x \frac{f(t)\,dt}{\sqrt{x-t}} \right| \leq 1 \right\}.$$

   Determina

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \left| \int_0^1 f \right|.$$