

Solicitud de admisión

Problemas

21 de abril de 2026

Debes resolver los dos problemas (cada uno con varios incisos) que se enuncian abajo. Esto es un trabajo individual: debes resolverlos tú sol@ sin la ayuda de nadie (incluida la IA). El primer problema es uno más o menos típico del cálculo diferencial. El segundo te da una idea de cómo serán los problemas del taller: es una demostración “guiada”, dividida en varios incisos, de un teorema interesante y bonito. Aunque los que verás en el taller son más largos y complejos.

Si no puedes probar algún inciso, explícanos que intentaste y sigue adelante con el resto.

Trata de dar argumentos y demostraciones completas y rigurosas de tus afirmaciones.

1. Define $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$f(x) = 2^{-x} + 2^{-\frac{1}{x}}.$$

- a) Calcula $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.
 - b) Calcula (y demuestra que tu cálculo es correcto) el máximo de f en todo su dominio.
 - c) ¿Qué puedes decir de su mínimo (también global)?
2. a) Considera la parábola $y = ax^2$. Toma sobre su gráfica dos puntos cualesquiera $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$. Considera la cuerda \overline{AB} . Prueba que existe un único punto C sobre la gráfica de la parábola, tal que la recta tangente a la parábola en C es paralela a la cuerda \overline{AB} . Calcula las coordenadas de C .
 - b) Vas a probar el siguiente teorema de Arquímedes: *el área de la región dentro de la parábola y limitada por la cuerda \overline{AB} es $4/3$ del área del triángulo $\triangle ABC$.*
Para ello, prueba los siguientes incisos.
 - i. Considera ahora dos cuerdas y dos triángulos más. Vamos a repetir lo que se hizo en 1., pero ahora para las cuerdas \overline{AC} y \overline{CB} .

Llama D al punto (entre A y C), sobre la parábola, tal que la tangente a la parábola en D es paralela a \overline{AC} ; de igual forma, E será el punto donde la tangente a la parábola es paralela a la cuerda \overline{CB} .

Prueba que

$$\text{área}(\triangle ADC) + \text{área}(\triangle CEB) = \frac{1}{4} \text{área}\triangle ACB.$$

Te damos una sugerencia de como atacar este problema. La recta vertical que pasa por C bisecta la cuerda \overline{AB} en un punto M (¡Pruébalo!). Argumenta ahora, que para probar lo que se pide, basta con demostrar que $\text{área}(\triangle AMC) = 4 \text{área}(\triangle ADC)$ y $\text{área}(\triangle MCB) = 4 \text{área}(\triangle CEB)$. Ambas se prueban igual, así que veamos la segunda. Prueba que la recta vertical por E bisecta tanto a \overline{CB} como a \overline{MB} . Llama G y H , respectivamente, a ambas intersecciones.

Prueba que $\overline{EG} = \frac{1}{2}\overline{GH}$. Termina la demostración.

- ii. Ahora itera el paso anterior: los dos triángulos $\triangle ADC$ y $\triangle CEB$ dan lugar a 4 cuerdas (\overline{AD} , \overline{DC} , \overline{CE} y \overline{EB}), luego a 4 triangulitos al tomar los puntos donde las tangentes son paralelas a estas 4 cuerdas. Estos triangulitos vuelven a tener áreas que suman (por el inciso anterior) un cuarto de la suma de las áreas de los triángulos $\triangle ADC$ y $\triangle CEB$.

Continúa iterando y prueba que:

- La unión (infinita) de todos estos triángulos coincide con la región de la parábola cuya área deseas obtener.
- Determina una serie que calcule el área de la unión de todos estos triángulos.

Concluye el teorema de Arquímedes.

- c) Explica por qué el teorema es cierto para cualquier parábola y no únicamente para $y = ax^2$.